

Bemerkungen zu einer Arbeit über das elektrostatische Potential einer Punktladung

HANS BEBIE

Institut für Theoretische Physik, Universität Bern, Bern
(Z. Naturforsch. 23 a, 1692 [1968]; eingegangen am 23. August 1968)

We derive an explicit formula for the electrostatic potential of a point charge in an inhomogeneous medium, whose dielectric constant is assumed to behave like $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \exp(2\alpha z)$. The results are compared with an earlier publication on the same subject.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹ wurde das elektrostatische Potential $\varphi(x, y, z)$ angegeben, das von einer Punktladung q erzeugt wird, welche sich (an der Stelle $x=y=z=0$) in einem speziellen inhomogenen Medium befindet; entsprechend einer realistischen Situation¹ wurde die Ortsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ durch die Voraussetzung

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon = 2 \alpha \mathbf{e}_z \quad (1)$$

($\alpha = \text{const}$, \mathbf{e}_z : Einheitsvektor in Richtung der z -Achse) und die Bezeichnung $\varepsilon(0, 0, 0) = \bar{\varepsilon}$ definiert. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -q \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (2)$$

[wo $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x) = 1$, sowie ε_0 die elektrische Feldkonstante], wurde in der Integraldarstellung²

$$4\pi \varepsilon_0 \bar{\varepsilon} \varphi(x, y, z) = q e^{-\alpha z} \int_0^{\infty} dk c \exp\{-|z|(k^2 + \alpha^2)^{\frac{1}{2}}\} J_0(k \varrho) \quad (3)$$

mit der Gewichtsfunktion c

$$c = c(\alpha, k) \equiv 1 \quad (4 \text{ a})$$

angegeben [$\varrho = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$].

¹ K. Hoch, Z. Naturforsch. 23 a, 504 [1968].

² Aus Gl. (13), Ref. ¹.

Wir möchten im folgenden darauf hinweisen, daß a) das gestellte Problem eine einfache explizite Lösung besitzt und b) die Gewichtsfunktion (4 a) nicht zutrifft, sondern richtig lautet

$$c(\alpha, k) = k(k^2 + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4 \text{ b})$$

a) Die aus Gl. (1) und Gl. (2) resultierende Differentialgleichung

$$\Delta \varphi + 2\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -q \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \delta(x) \delta(y) \delta(z) \quad (5)$$

besitzt als Lösung die Fourier-Darstellung

$$\varphi(x, y, z) = (2\pi)^{-3} \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon} \int dp_1 dp_2 dp_3 \frac{e^{i(p_1 x + p_2 y + p_3 z)}}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - 2i\alpha p_3}. \quad (6)$$

Das Integral in Gl. (6) läßt sich nach elementaren Methoden berechnen und ergibt [mit $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$]

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \varepsilon} r^{-1} e^{-\alpha(r+z)}. \quad (7)$$

b) Führt man in der Formel³

$$\int_0^\infty dt e^{-|z|t} J_0(\varrho \sqrt{t^2 + 2\alpha t}) = (z^2 + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha(\sqrt{z^2 + \varrho^2} - |z|)} \quad (8)$$

die neue Integrationsvariable $k = \sqrt{t^2 + 2\alpha t}$ ein, so erhält man

$$\int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + \alpha^2}} e^{-|z|\sqrt{k^2 + \alpha^2}} J_0(\varrho k) = (z^2 + \varrho^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\alpha\sqrt{z^2 + \varrho^2}}, \quad (9)$$

woraus, zusammen mit der Lösung (7), die Darstellung (3) mit der Gewichtsfunktion (4 b) folgt.

Wir weisen darauf hin, daß der Gradient der in¹ angegebenen Lösung für festes $\varrho \neq 0$ an der Stelle $z=0$ keine stetige Funktion von z ist, im Gegensatz zur hier vorgelegten Lösung (7).

³ M. ABRAMOWITZ u. I. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publication, Inc., New York 1965. Formel 29.3.94, S. 1027.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.