Bemerkungen zu einer Arbeit über das elektrostatische Potential einer Punktladung

HANS BEBIE

Institut für Theoretische Physik, Universität Bern, Bern

(Z. Naturforsch. **23 a**, 1692 [1968]; eingegangen am 23. August 1968)

We derive an explicit formula for the electrostatic potential of a point charge in an inhomogeneous medium, whose dielectric constant is assumed to behave like $\varepsilon = \bar{\varepsilon} \exp(2\,\alpha\,z)$. The results are compared with an earlier publication on the same subject.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [1] wurde das elektrostatische Potential $\varphi(x, y, z)$ angegeben, das von einer Punktladung q erzeugt wird, welche sich (an der Stelle $x=y=z=0$) in einem speziellen inhomogenen Medium befindet; entsprechend einer realistischen Situation [1] wurde die Ortsabhängigkeit der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$ durch die Voraussetzung

$$\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon = 2\,\alpha \boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

($\alpha = \text{const}$, $\boldsymbol{e}_z$: Einheitsvektor in Richtung der z-Achse) und die Bezeichnung $\varepsilon(0, 0, 0) = \bar{\varepsilon}$ definiert. Die Lösung der Differentialgleichung

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -q\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \tag{2}$$

[wo $\delta(x) = 0$ für $x \neq 0$ und $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\,\delta(x) = 1$, sowie ε_0 die elektrische Feldkonstante], wurde in der Integraldarstellung [2]

$$4\,\pi\,\varepsilon_0\,\bar{\varepsilon}\,\varphi(x, y, z) = \\ = q\,e^{-\alpha z} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}k\, c \exp\{-|z|\,(k^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\}\, J_0(k\,\varrho) \tag{3}$$

mit der Gewichtsfunktion c

$$c = c(\alpha, k) \equiv 1 \tag{4 a}$$

angegeben [$\varrho = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$].

Wir möchten im folgenden darauf hinweisen, daß a) das gestellte Problem eine einfache explizite Lösung besitzt und b) die Gewichtsfunktion (4 a) nicht zutrifft, sondern richtig lautet

$$c(\alpha, k) = k\,(k^2+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4 b}$$

a) Die aus Gl. (1) und Gl. (2) resultierende Differentialgleichung

$$\Delta\varphi + 2\,\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -q \frac{1}{\varepsilon_0\,\bar{\varepsilon}}\,\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z) \tag{5}$$

besitzt als Lösung die Fourier-Darstellung

$$\varphi(x, y, z) = (2\,\pi)^{-3} \frac{q}{\varepsilon_0\,\bar{\varepsilon}} \int \mathrm{d}p_1\,\mathrm{d}p_2\,\mathrm{d}p_3 \frac{e^{i(p_1 x + p_2 y + p_3 z)}}{p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2 - 2\,i\,\alpha\,p_3}. \tag{6}$$

Das Integral in Gl. (6) läßt sich nach elementaren Methoden berechnen und ergibt [mit $r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$]

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,\bar{\varepsilon}}\, r^{-1}\, e^{-\alpha(r+z)}. \tag{7}$$

b) Führt man in der Formel [3]

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{d}t\, e^{-|z|\,t}\, J_0(\varrho\,\sqrt{t^2+2\,\alpha\,t}) \\ = (z^2+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha(\sqrt{z^2+\varrho^2}-|z|)} \tag{8}$$

die neue Integrationsvariable $k = \sqrt{t^2+2\,\alpha\,t}$ ein, so erhält man

$$\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}k\,k}{\sqrt{k^2+\alpha^2}}\, e^{-|z|\sqrt{k^2+\alpha^2}}\, J_0(\varrho\,k) \\ = (z^2+\varrho^2)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\alpha\sqrt{z^2+\varrho^2}}, \tag{9}$$

woraus, zusammen mit der Lösung (7), die Darstellung (3) mit der Gewichtsfunktion (4 b) folgt.

Wir weisen darauf hin, daß der Gradient der in [1] angegebenen Lösung für festes $\varrho \neq 0$ an der Stelle $z=0$ keine stetige Funktion von z ist, im Gegensatz zur hier vorgelegten Lösung (7).

[1] K. HOCH, Z. Naturforsch. **23 a**, 504 [1968].

[2] Aus Gl. (13), Ref. [1].

[3] M. ABRAMOWITZ u. I. STEGUN, Handbook of Mathematical Functions, Dover Publication, Inc., New York 1965. Formel 29.3.94, S. 1027.